ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА ПО МАТЕМАТИКЕ
для поступающих в магистратуру

1. 3 Вычислить интеграл $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$.

2. 3 Вычислить предел $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\operatorname{arctg} x}{\arccos\frac{1}{x}}\right)^{\frac{x}{1-x\sin\frac{1}{x}}}$.

3. 4 Рассматриваются параболоид

$$P = \left\{ \ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ : \ z = x^2+y^2+1 \ \right\},$$

плоскость

$$\mathit{\Pi} = \left\{ \ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ : \ x-2y+2z = 5 \ \right\}$$

и точка M с координатами $(1,1,3)$. Система координат декартова прямоугольная.

а) 2 Найти расстояние от касательной плоскости параболоида P в точке M до начала координат.

б) 2 Найти каноническое уравнение касательной к кривой, образованной пересечением параболоида P и плоскости $\mathit{\Pi}$, в точке M.

4. 4 Решить задачу Коши $\displaystyle\frac{y(x)y''(x)}{y'(x)} = y'(x)+y^2(x), \quad y(0)=-1, \quad y'(0)=1.$

5. 4 Рассматривается область

$$G = \left\{ \ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ : \ x^2+y^2<z<3+2x \ \right\},$$

граница ∂G которой ориентирована полем внешних нормалей. Вычислить поверхностный интеграл

$$\int\limits_{\partial G} z\,dx\,dy.$$

Система координат декартова прямоугольная.

6. 5 Вычислить интеграл $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\cos x}{x+1+i}\right)^2 dx$.

7. 7 Случайные величины X и Y независимы. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[0,1]$. Случайная величина Y имеет плотность распределения

$$\rho(t) = \begin{cases} 0, & t<1, \\ \frac{1}{t^2}, & t\geq 1. \end{cases}$$

а) 3 Найти функцию распределения случайной величины $Z=\frac{X}{Y}$.

б) 2 Вычислить математическое ожидание случайной величины Z.

в) 2 Вычислить дисперсию случайной величины Z.

ОТВЕТЫ ПО МАТЕМАТИКЕ

для поступающих в магистратуру

1. 3 Вычислить интеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}\,.$$

Ответ: π.

$$t = \sqrt{\frac{x}{1-x}}, \quad x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2tdt}{(1+t^2)^2},$$

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \int\limits_0^1 \frac{dx}{x}\sqrt{\frac{x}{1-x}} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{2tdt}{(1+t^2)^2}\,\frac{(1+t^2)}{t} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{2dt}{1+t^2} = \pi.$$

2. 3 Вычислить предел

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\operatorname{arctg} x}{\arccos\frac{1}{x}}\right)^{\frac{x}{1-x\sin\frac{1}{x}}}\,.$$

Ответ: $\exp\left(\frac{6}{\pi}\right)$.

При $x \to +\infty$ имеем:

$$\operatorname{arctg} x = \tfrac{\pi}{2} - \tfrac{1}{x} + \tfrac{1}{3x^3} + o\left(\tfrac{1}{x^3}\right), \quad \arccos\tfrac{1}{x} = \tfrac{\pi}{2} - \tfrac{1}{x} - \tfrac{1}{6x^3} + o\left(\tfrac{1}{x^3}\right),$$

$$\frac{\operatorname{arctg} x}{\arccos\frac{1}{x}} = \frac{1 - \frac{2}{\pi x} + \frac{2}{3\pi x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)}{1 - \frac{2}{\pi x} - \frac{1}{3\pi x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)} = 1 + \frac{1}{\pi x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

$$\frac{x}{1-x\sin\frac{1}{x}} = \frac{x}{\frac{1}{6x^2} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)} = 6x^3 + o\left(x^2\right).$$

3. 4 Рассматриваются параболоид

$$P = \left\{\ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ z = x^2+y^2+1\ \right\},$$

плоскость

$$\Pi = \left\{\ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ x-2y+2z = 5\ \right\}$$

и точка M с координатами $(1,1,3)$. Система координат декартова прямоугольная.

а) 2 Найти расстояние от касательной плоскости параболоида P в точке M до начала координат.

б) 2 Найти каноническое уравнение касательной к кривой, образованной пересечением параболоида P и плоскости Π, в точке M.

Ответ: а) $\frac{1}{3}$, б) $\frac{x-1}{2} = \frac{1-y}{5} = \frac{3-z}{6}$.

а) Рассмотрим $F(x,y,z) = x^2 + y^2 - z + 1$. Нормаль к касательной плоскости T параболоида P в точке M равна

$$\vec{n} = \nabla F(1,1,3) = (2,2,-1).$$

Уравнение касательной плоскости T имеет вид

$$2x + 2y - z = 1.$$

Тогда расстояние от плоскости T до начала координат равно $\frac{1}{|\vec{n}|} = \frac{1}{3}$.

б) Касательная к кривой $P \cap \Pi$ в точке M равна $T \cap \Pi$. Поэтому её направляющий вектор равен

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, каноническое уравнение касательной имеет вид

$$\frac{x-1}{2} = \frac{1-y}{5} = \frac{3-z}{6}.$$

4. 4 Решить задачу Коши

$$\frac{y(x)y''(x)}{y'(x)} = y'(x) + y^2(x), \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 1.$$

Ответ: $y(x) = -\frac{1}{x+1}$.

Перейдём к функции $y'(x) = z(y)$, тогда $y''(x) = z'(y)z(y)$, откуда

$$yz'(y) = z(y) + y^2, \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{z(y)}{y}\right)' y^2 = y^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{z(y)}{y} = y + C.$$

Так как при $y = -1$ имеем $z = 1$, то $C = 0$, откуда

$$y'(x) = z(y) = y^2(x) \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{y(x)} = x + D.$$

Так как $y(0) = -1$, то $D = 1$, откуда $y(x) = -\frac{1}{x+1}$.

5. 4 Рассматривается область

$$G = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 < z < 3 + 2x \right\},$$

граница ∂G которой ориентирована полем внешних нормалей. Вычислить поверхностный интеграл

$$\int\limits_{\partial G} z\,dx\,dy.$$

Система координат декартова прямоугольная.

Ответ: 8π.

По теореме Остроградского—Гаусса имеем:

$$\int\limits_{\partial G} z\,dx\,dy = \int\limits_{G} dx\,dy\,dz = \int\limits_{(x-1)^2+y^2<4} dx\,dy \int\limits_{x^2+y^2}^{3+2x} dz = \{ \text{ замена } x = 1 + r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi \ \}$$

$$= \int\limits_0^2 r\,dr \int\limits_0^{2\pi} d\varphi\,(4 - r^2) = 2\pi(8-4) = 8\pi.$$

6. 5 Вычислить интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\cos x}{x+1+i}\right)^2 dx\,.$$

Ответ: $-\pi\exp(2i-2)$.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\cos x}{x+1+i}\right)^2 dx = \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{2(x+1+i)^2}}_{=0} + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{2(x+1+i)^2}\,dx =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{4}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2ix}}{(x+1+i)^2}\,dx}_{=0} + \frac{1}{4}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2ix}}{(x+1+i)^2}\,dx =$$

$$= -\frac{2\pi i}{4}\,\frac{d}{dx}e^{-2ix}\Big|_{x=-1-i} = -\pi\exp(2i-2).$$

7. 7 Случайные величины X и Y независимы. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[0,1]$. Случайная величина Y имеет плотность распределения

$$\rho(t) = \begin{cases} 0, & t<1, \\ \frac{1}{t^2}, & t \geq 1. \end{cases}$$

а) 3 Найти функцию распределения случайной величины $Z = \frac{X}{Y}$.

б) 2 Вычислить математическое ожидание случайной величины Z.

в) 2 Вычислить дисперсию случайной величины Z.

Ответ: $P(Z<t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ t(1-\ln t), & 0<t<1, \\ 1, & t \geq 1. \end{cases}$ $\qquad MZ = \frac{1}{4}, \qquad DZ = \frac{7}{144}.$

$$P(Z<t) = \iint\limits_{\substack{0<\xi<1 \\ \eta>1, \\ \frac{\xi}{\eta}<t}} \frac{d\xi\,d\eta}{\eta^2} = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ \int\limits_1^{+\infty} \frac{d\eta}{\eta^2} \int\limits_0^{\min\{1,t\eta\}} d\xi, & t>0, \end{cases}$$

при $0<t<1$ имеем

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{d\eta}{\eta^2} \int\limits_0^{\min\{1,t\eta\}} d\xi = \int\limits_1^{\frac{1}{t}} \frac{d\eta}{\eta^2}\,t\eta + \int\limits_{\frac{1}{t}}^{+\infty} \frac{d\eta}{\eta^2} = t - t\ln t,$$

при $t \geq 1$ имеем

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{d\eta}{\eta^2} \int\limits_0^{\min\{1,t\eta\}} d\xi = \int\limits_1^{+\infty} \frac{d\eta}{\eta^2} = 1.$$

Следовательно,

$$P(Z<t)=\begin{cases} 0, & t\le 0,\\ t(1-\ln t), & 0<t<1,\\ 1, & t\ge 1.\end{cases}$$

Плотность распределения случайной величины Z равна $\rho_Z(t)=\begin{cases} 0, & t\le 0,\\ -\ln t, & 0<t<1,\\ 0, & t\ge 1.\end{cases}$

$$MZ=\int\limits_0^1 t\,(-\ln t)dt=\frac{1}{4},$$

$$DZ=MZ^2-(MZ)^2=\int\limits_0^1 t^2\,(-\ln t)dt-\frac{1}{16}=\frac{1}{9}-\frac{1}{16}=\frac{7}{144}.$$